1

Άσκηση: Δίνεται η καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με $c(t)=(e^t\cos t,\ e^t\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$

i) Είναι κανονική;

ii) Βρείτε το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0=0$

iii) Να γίνει αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου.

iv) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα της συνάρτησης και του t και του μήκους τόξου.

v) Σκεπάζουν όλες οι εφαπτόμενες το επίπεδο;

25/10/18

i) $c'(t)=\left(e^t(\cos t-\sin t),\ e^t(\sin t+\cos t)\right)$

$\|c'(t)\|=e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}=e^t\sqrt{2}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

άρα, η c είναι κανονική

ii) Το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0=0$ είναι η συνάρτηση $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$s=s(t)=\int_0^t\|c'(u)\|\,du=\int_0^t\sqrt{2}\,e^u\,du=\sqrt{2}\,e^u\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{s=\sqrt{2}(e^t-1)}$

iii) $s=\sqrt{2}(e^t-1) \Leftrightarrow e^t-1=\dfrac{s}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow e^t=\dfrac{s}{\sqrt{2}}+1 \overset{s>-\sqrt{2}}{\Longleftrightarrow}$

$t=\log\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)$, $s>\sqrt{2}$

Η αναπαράσταση της c με φυσική παράμετρο είναι η καμπύλη
$c:(-\sqrt{2},+\infty)\to\mathbb{R}^2$, $c(s)=c\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)$

$$=\Big(\underbrace{\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\cos\left(\log\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)}_{x(s)},\ \underbrace{\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\sin\left(\log\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)}_{y(s)}\Big)$$

iv) $c(s)=(x(s),y(s))$, $k(s)=\dot{x}(s)\ddot{y}(s)-\dot{y}(s)\ddot{x}(s)$

ή

$c(t)=(x(t),y(t))$, $k(t)=\dfrac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\|c'(t)\|^3}$

$x'(t)=e^t(\cos t-\sin t) \Rightarrow x''(t)=e^t(\cancel{\cos t}-\sin t-\sin t-\cancel{\cos t})=-2e^t\sin t$
$y'(t)=e^t(\cos t+\sin t) \Rightarrow y''(t)=e^t(\cos t+\cancel{\sin t}-\cancel{\sin t}+\cos t)=2e^t\cos t$

Άρα $k(t)=\dfrac{1}{(\sqrt{2}e^t)^3}\left(2e^{2t}(\cos t-\sin t)\cos t+2e^{2t}(\cos t+\sin t)\sin t\right)$

$=\dfrac{2e^{2t}}{2\sqrt{2}e^{3t}}\left(\cos^2 t-\cancel{\sin t\cos t}+\cancel{\sin t\cos t}+\sin^2 t\right) \Rightarrow \boxed{k(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}e^t}}$

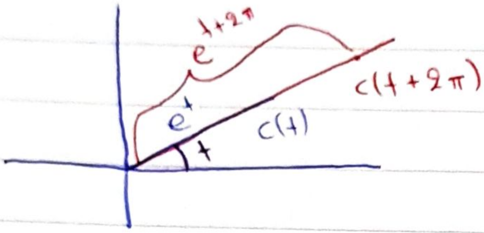
όταν το $t\to+\infty$ το $k(t)\to 0$!

Η καμπυλότητα ως συνάρτηση της φυσικής παραμέτρου s είναι
$k(s)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)}=\dfrac{1}{s+\sqrt{2}}$, $s>-\sqrt{2}$

v) $t\in\mathbb{R}$. Η εφαπτόμενη ευθεία της c στο t διέρχεται από το σημείο $c(t)$ και είναι $\parallel c'(t)$. Άρα, η διανυσματική της είναι: $\vec{r}=c(t)+\lambda c'(t)$, $\lambda\in\mathbb{R}$
Αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες κάλυπταν το $\mathbb{R}^2$, τότε θα υπήρχε $t,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $0=c(t)+\lambda c'(t)$, δηλαδή $c(t), c'(t)$ γραμμ. εξαρτ.

$$\begin{vmatrix} e^t\cos t & e^t\sin t \\ e^t(\cos t-\sin t) & e^t(\cos t+\sin t) \end{vmatrix} = e^{2t}(\cos^2 t+\cos t\sin t-\sin t\cos t+\sin^2 t) = e^{2t} > 0$$, άτοπο

$c(t) = e^t(\cos t + i\sin t)$

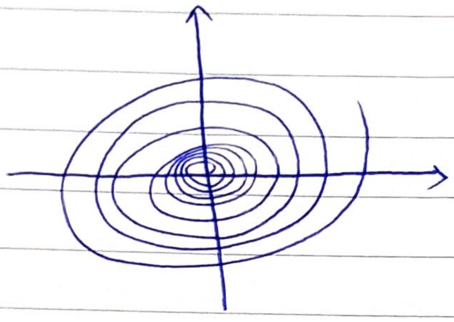


$c(t_1) = c(t_2) \Rightarrow$

$\|c(t_1)\| = \|c(t_2)\| \Rightarrow e^{t_1} = e^{t_2} \Rightarrow t_1 = t_2$

$\Rightarrow$ ΔΕΝ έχει αυτοτομές

$\lim_{t\to+\infty} c(t) = +\infty$, $\lim_{t\to-\infty} c(t) = (0,0)$



Άσκηση: Να βρεθεί καμπύλη c στο $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο τέτοια ώστε $c(0) = (1,1)$, $\vec{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και καμπυλότητα $k(s) = 2, \forall s$?

Λύση

$\vec{t}(0) = \dot{c}(0)$

$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

$\dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\phi(s))$

$k(s) = \dot{\phi}(s) \Leftrightarrow$ (από θεωρία)

$\dot{\phi}(s) = 2$

$\Rightarrow \int_0^s \dot{\varphi}(u)du = \int_0^s 2du \Rightarrow \phi(s) - \varphi(0) = 2s$

$\Rightarrow \boxed{\phi(s) = 2s + \varphi(0)}$

$\dot{c}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\cos\phi(0), \sin\phi(0))$ Μπορώ να θεωρήσω ότι $\phi(0) = \frac{\pi}{4}$

Άρα, $\boxed{\phi(s) = 2s + \frac{\pi}{4}}$

$\dot{c}(s) = \left(\cos\left(2s + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(2s + \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow \int_0^s \dot{c}(u)du = \int_0^s \cos\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)du, \int_0^s \sin\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)du$

$\Leftrightarrow \int_0^s \dot{c}(u)du = \frac{1}{2}\left(2\int_0^s \cos\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)du, 2\int_0^s \sin\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)du\right)$

$\Leftrightarrow c(s) - c(0) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^s, -\cos\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^s\right)$

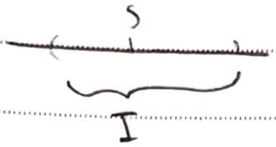
$\Leftrightarrow c(s) = (1,1) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(2s + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\cos\left(2s + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

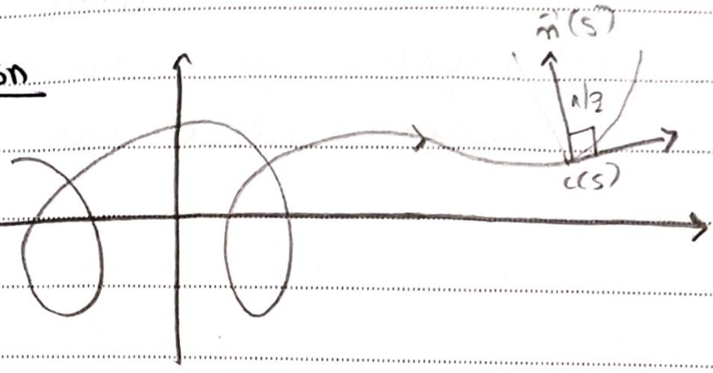
$c(s) = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(2s + \frac{\pi}{4}\right), -\cos\left(2s + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

Κύκλος με ακτίνα $\frac{1}{2}$.

Άσκηση: Για καμπύλη $c(s)$ του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο s, δίνεται $\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s)$, $s \in I$. Τι συμπεράσματα εξάγονται για την καμπύλη;

Λύση





$\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$

$\vec{n}(s) = J\vec{t}(s)$

$J\vec{n}(s) = J^2\vec{t}(s)$

$\underline{\underline{J^2 = -Id}} \Rightarrow J\vec{n}(s) = -\vec{t}(s) \Leftrightarrow \vec{t}(s) = -J\vec{n}(s)$

$J(u_1, u_2) = (-u_2, u_1)$

$J\vec{n}(s) = J(-\sin s, \cos s) = (-\cos s, -\sin s)$

$\Rightarrow \vec{t}(s) = (\cos s, \sin s) \Rightarrow$

$\dot{c}(s) = (\cos s, \sin s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{s_0}^{s} \dot{c}(u)du = \left(\int_{s_0}^{s} \cos u\, du, \int_{s_0}^{s} \sin u\, du\right) \Leftrightarrow$$

$$c(s) - c(s_0) = \left(\sin u\Big|_{s_0}^{s}, -\cos u\Big|_{s_0}^{s}\right) \Rightarrow c(s) = c(s_0) + (\sin s - \sin s_0, -\cos s + \cos s_0)$$

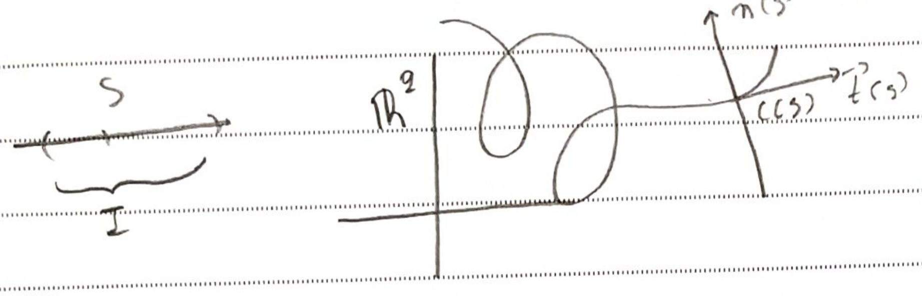
$\vec{t}(s) = (\cos s, \sin s)$

$\dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{n}(s) \Rightarrow k(s) = 1$

Άσκηση: Να βρεθούν όλες οι κανονικές καμπύλες των οποίων όλες οι εφαπτόμενες (κάθετες) ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Έστω $c(s)$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$, τέτοια ώστε όλες οι κάθετες ευθείες της να διέρχονται από το σημείο P_0.



Η κάθετη ευθεία της c στο s έχει διανυσματική εξίσωση

$\vec{n} = c(s) + \lambda \vec{n}(s)$.

Από υπόθεση έχω ότι $\forall s \in I$, $\exists \lambda = \lambda(s)$ ώστε $\boxed{\vec{OP_0} = c(s) + \lambda(s)\vec{n}(s) \quad (*) \quad \forall s \in I}$

$\langle \vec{OP_0}, \vec{n}(s) \rangle = \langle c(s), \vec{n}(s) \rangle + \lambda(s) \langle \vec{n}(s), \vec{n}(s) \rangle$

$\Rightarrow \lambda(s) = \langle \vec{OP_0}, \vec{n}(s) \rangle - \langle c(s), \vec{n}(s) \rangle$

$\Rightarrow \lambda(s)$ είναι λεία

Παραγωγίζω την $(*)$ $\quad 0 = \dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{n}}(s)$

$0 = \vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{n}}(s) \xRightarrow{\dot{\vec{n}} = -\kappa t}$

$0 = \vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) - \lambda(s)\kappa(s)\vec{t}(s) \Leftrightarrow$

$0 = (1 - \lambda(s)\kappa(s))\vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) \quad \forall s$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \lambda(s)\kappa(s) = 0 & \Rightarrow \kappa(s) = \dfrac{1}{\lambda}, \ \lambda \neq 0 \\ \dot{\lambda}(s) = 0 & \xRightarrow{\forall s} \lambda(s) = \text{σταθ} = \lambda \end{cases}$

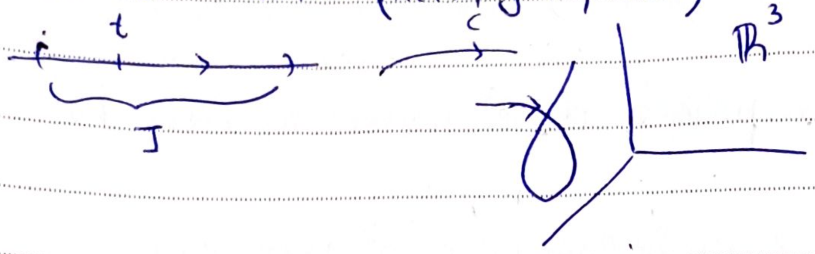
$\vec{OP_0} = c(s) + \lambda\vec{n}(s) \Leftrightarrow c(s) - \vec{OP_0} = -\lambda\vec{n}(s) \Rightarrow \| c(s) - \vec{OP_0} \| = |-\lambda|$

$\Rightarrow d(c(s), P_0) = |\lambda|$

Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$

Ορισμός

Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ είναι μια απεικόνιση $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ τάξεως $C^r, r \geq 3$ $\quad c(t) = (x(t), y(t), z(t))$



Γεωμετρική ισοτιμία

Ορισμός

Οι καμπύλες $c, \tilde{c}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καλούνται <u>γεωμετρικώς ισότιμες</u>

<u>αν-ν</u> $\exists$ $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, ώστε $\tilde{c} = T \circ c$

$(\tilde{c}' = T_* c', \; T = T_v \circ A, \; A = T_*)$

Μήκος: $L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$

Μήκος τόξου: $s: I \to \mathbb{R}$, $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du$

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0$$ Αν c είναι κανονική

Κανονική: Η c καλείται κανονική αν $c'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in I$

Καμπυλότητα καμπυλών του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο

Ορισμός
Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$. Καλούμε καμπυλότητα της c τη συνάρτηση $k: I \to [0, +\infty)$ με $k(s) = \|\ddot{c}(s)\|$, $s \in I$

Σημαντική Παρατήρηση: Για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ ισχύει $k(s) \geq 0 \ \forall s$

!Προσοχή: Υπάρχει διαφορά στην καμπυλότητα στο $\mathbb{R}^2$ και στην καμπυλότητα στο $\mathbb{R}^3$!

Παρατήρηση: $k(s) = 0 \ \forall s \in I \Rightarrow \ddot{c}(s) = 0 \ \forall s \in I \Rightarrow \dot{c}(s) = v = \text{σταθ}$

$$\Rightarrow c(s) = P_0 + sv$$

$c(s)$, $\tilde{c} = T \circ c$, $\tilde{c}(s) = T(c(s))$

$$\frac{d\tilde{c}}{ds} = T_* \dot{c} \Rightarrow \left\|\frac{d\tilde{c}}{ds}\right\| = \|T_* \dot{c}\| = \|\dot{c}\| = 1$$

$\Rightarrow s$ μήκος και για την $\tilde{c}$

$k(s) = \|\ddot{c}(s)\|$, $\tilde{k}(s) = \|\ddot{\tilde{c}}(s)\|$

$$\dot{\tilde{c}} = T_* \dot{c} \Rightarrow \ddot{\tilde{c}} = T_* \ddot{c} \Rightarrow \|\ddot{\tilde{c}}\| = \|T_* \ddot{c}\| = \|\ddot{c}\| \Rightarrow \underline{\tilde{k} = k}$$

Καμπυλότητα κανονικών καμπυλών του $\mathbb{R}^3$

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t \in I_0$.

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\|du \Rightarrow \frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| > 0$$

Η $s = s(t)$ αντιστρέφεται $t = f(s)$

Η $\bar{c} = c \circ f$ είναι η αναπαραμέτρηση της c με παράμετρο το s κα
έχει καμπυλότητα $\bar{k}(s)$

Ορισμός
Ονομάζουμε καμπυλότητα της $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο $t \in I$ τη συνάρτηση $k: I \subset \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $k = \bar{k} \circ s$ ή $k(t) = \bar{k}(s(t))$.

Υπολογισμός Καμπυλότητας Καμπυλών με τυχαία παράμετρο.

$k = \|\ddot{c}\| = \|\dot{c} \times \ddot{c}\|$ $\quad \|\dot{c}\| = 1 \Leftrightarrow \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1$ $\quad 2\langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = 0 \Rightarrow \dot{c} \perp \ddot{c}$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dc}{dt} \Rightarrow \dot{c} = \frac{dt}{ds} c'$$

$$\ddot{c} = \frac{d}{ds}(\dot{c}) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds} c'\right) = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \frac{dt}{ds}\frac{dt}{ds}\frac{dc'}{dt}$$

$$\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''$$

$$k = \|\dot{c} \times \ddot{c}\| = \left\|\frac{dt}{ds} c' \times \left(\frac{d^2t}{ds^2} c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''\right)\right\| = \left\|\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c' \times c''\right\| = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$$

Πρόταση

Η καμπυλότητα κανονικής καμπύλης $c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ είναι η συνάρτηση

$$k=\frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}$$

Παράδειγμα: Θεωρώ την καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $c(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Είναι λεία καμπύλη με διάνυσμα ταχύτητας

$$c'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$\|c'(t)\|=\sqrt{a^2+b^2}>0 \ \forall t\in\mathbb{R}$. Άρα, είναι κανονική.

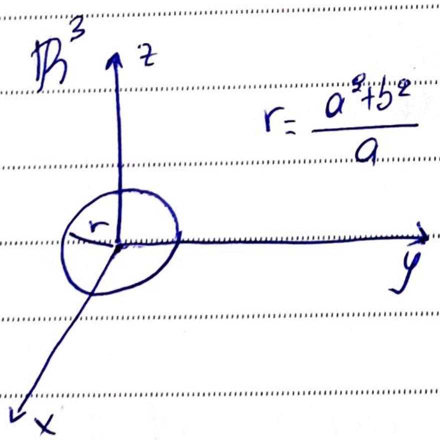
$$c''(t)=(-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$c'(t)\times c''(t)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & a\sin t & 0 \end{vmatrix}=(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$=a(b\sin t, -b\cos t, a)$$

Άρα, η καμπυλότητα είναι η συνάρτηση

$$k(t)=\frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}^{\,3}}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

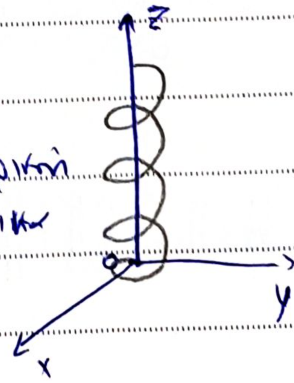


$r=\frac{a^2+b^2}{a}$

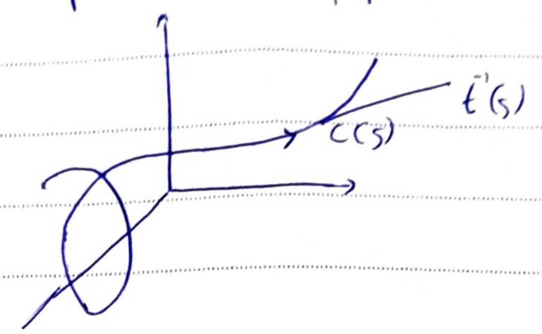
$\tilde{c}(t)=(r\cos t, r\sin t, 0)$

$\tilde{k}=\frac{1}{r}=\frac{a}{a^2+b^2}$

κυλινδρική έλικα



Θεωρώ καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$



Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$

$$\langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{c}(s), \ddot{c}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{c}(s), \ddot{c}(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \dot{c}(s) \perp \ddot{c}(s)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{c}(s) \perp t(s)$$

Υπόθεση: Υποθέτω ότι $k \neq 0$ παντού.

Αν ισχύει η υπόθεση, τότε ορίζω το πρωτεύον κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}(s) = \dfrac{\ddot{c}(s)}{\|\ddot{c}(s)\|} = \dfrac{\ddot{c}(s)}{k(s)}$

Το δεύτερο κάθετο διάνυσμα είναι το $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ τότε $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ είναι δεξιόστροφη ορθομοναδιαία βάση το λεγόμενο πλαίσιο Frenet.

$(V, \langle , \rangle)$ $e_1, \dots, e_n$ ορθομοναδιαία βάση. Τότε $\forall v \in V$ $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$

$$\vec{t}'(s) = \langle \vec{t}'(s), \cancel{\vec{t}(s)} \rangle \vec{t}(s) + \langle \vec{t}'(s), \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle \vec{t}'(s), \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s)$$

$$\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle = 1 \Leftrightarrow 2\langle \vec{t}'(s), \vec{t}(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{\langle \vec{t}'(s), \vec{t}(s) \rangle = 0}$$

$$\vec{t}'(s) = \ddot{c}(s) = k(s)\vec{n}(s) \Rightarrow \vec{t}' = k\vec{n}$$